



## **KOVARIJANSA I KORELACIJA SREDNJOŠKOLSKOG USPEHA I POKAZANIH REZULTATA NA PRIJEMNOM ISPITU**

*Mladen Janjić<sup>1</sup>, Vera Lazarević<sup>2</sup>*

**Rezime:** U ovom radu vršena je analiza uspeha učenika koji su polagali prijemni ispit na Fakultetu tehničkih nauka u Čačku u junu 2013. godine. Za sprovođenje ove analize korišćene su odgovarajuće statistike i data su adekvatna tumačenja dobijenih rezultata.

**Ključne reči:** kovarijansa, korelacija prijemni ispit, uspeh u srednjoj školi, matematička statistika.

## **COVARIANCE AND CORELLATION OF HIGH SCHOOL SUCCESS AND ENTRANCE EXAM RESULTS**

**Summary:** This paper presents the analysis of the candidates' results obtained at high school and entrance exam at Faculty of Technical Sciences in Čačak in June, 2013, as well as the comparison of these results. The adequate statistics and statistical methods were used in this analysis, and the conclusions based on the obtained results have been presented in the paper.

**Key words:** covariance, correlation, entrance exam, high school results, mathematical statistics.

### **1. UVOD**

U ovom radu je analiziran uspeh učenika u srednjoj školi i postignuti rezultati na prijemnom ispitu na Fakultetu tehničkih nauka (FTN) u Čačku. Iz analize ovih rezultata slede neki važni zaključci. Razmatranja i rezultati ovog rada odnose se na aktuelnu problematiku savremenog društva, tj. na problem obrazovanja i prateće reforme obrazovnog sistema. U tom cilju, na populaciji učenika koji su polagali prijemni ispit na Fakultetu tehničkih nauka u Čačku posmatrana su dva obeležja  $X$  i  $Y$  i registrovane su njihove vrednosti. Te podatke prikazujemo kao u Tabeli 1 [1].

U našem slučaju, vrednost obeležja  $X$  je broj poena koji se odnosi na uspeh učenika, tj.  $x_k \in [16, 40]$ , a vrednost obeležja  $Y$  je broj poena osvojen na prijemnom ispitu iz izabranog predmeta, tj.  $y_k \in [0, 60]$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), gde je  $n$  broj učenika koji su položili

<sup>1</sup> Mr Mladen Janjić, Fakultet tehničkih nauka u Čačku, e-mail: [mladen.janji@ftn.kg.ac.rs](mailto:mladen.janji@ftn.kg.ac.rs)

<sup>2</sup> Dr Vera Lazarević, Fakultet tehničkih nauka u Čačku, e-mail: [vera.lazarevic@ftn.kg.ac.rs](mailto:vera.lazarevic@ftn.kg.ac.rs)

prijemni ispit i stekli uslov da se upišu na izabrani studijski program.

Uzoračke sredine (sredine uzoraka) izračunavamo primenom statistike:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k .$$

U našem slučaju uzoračke sredine su:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k , \quad \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k ,$$

pri čemu među vrednostima obeležja  $X$ , odnosno  $Y$ , može biti i istih vrednosti.

Za disperziju uzorka koristimo statistiku:

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2 ,$$

što u našem slučaju daje uzorke disperzije:

$$\bar{s}_{n_x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2 , \quad \bar{s}_{n_y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y}_n)^2 .$$

Prirodno se nameće problem ocene stepena povezanosti posmatranih obeležja  $X$  i  $Y$  na elementima iz uzorka. Za to koristimo koeficijent korelacije na osnovu uzorka, tj. statistiku:

$$R_{X,Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k Y_k - \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sqrt{\bar{S}_{n_x}^2 \cdot \bar{S}_{n_y}^2}} .$$

## 2. KOVARIJANSA I KOEFICIJENAT KORELACIJE

Centar rasturanja vrednosti dvodimenzionalne slučajne promenljive  $(X, Y)$  okarakterisan je "srednjom tačkom"  $(EX, EY)$ , tj.  $(m_x, m_y)$ , gde su  $m_x$  i  $m_y$  matematička očekivanja slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$ .

Centralni moment reda  $r+s$  za ovu slučajnu promenljivu je  $E((X-EX)^r (Y-EY)^s)$ . Za  $r=s=1$  dobija se centralni moment drugog reda koji predstavlja meru rasturanja vrednosti slučajne promenljive  $(X, Y)$  oko  $(m_x, m_y)$ . Ovaj moment se naziva *korelacionim momentom* ili *kovarijansom* slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$  i označava se sa  $\text{Cov}(X, Y)$ , tj.

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X-EX)(Y-EY)) .$$

Iz osobina matematičkog očekivanja sledi da je:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY .$$

U slučaju nezavisnosti  $X$  i  $Y$ , ova razlika je  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . To znači da *veličina te razlike određuje stepen zavisnosti* slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$ .

Kao mera najčešće sretane, odnosno, linearne zavisnosti između slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$  uvodi se koeficijent korelacije

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} , \quad \sigma_X = +\sqrt{DX} , \quad \sigma_Y = +\sqrt{DY} .$$

Ovaj koeficijent  $\rho_{X,Y}$  meri jačinu linearne povezanosti  $X$  i  $Y$ . Ako je  $\rho_{X,Y} = 0$ , to ne mora da znači da su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne promenljive, već to znači da između  $X$  i  $Y$  ne postoji linearna veza. Međutim, one mogu biti čak i jako povezane nekom drugom vezom krivolinijskog oblika.

Ali, ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne promenljive, onda je  $\rho_{X,Y} = 0$ .

Dakle, kod proučavanja uzajamnih veza slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$  utvrđuje se *oblik i smer povezanosti*, kao i njena *jačina*.

Skup statističkih metoda kojima se to postiže naziva se *teorijom korelacije*. Osnovni pokazatelji korelacionih veza su *jednačine regresije i koeficijent korelacije*.

Linije regresije se prilagođavaju datim vrednostima promenljivih koje se ispituju, a koeficijent korelacije pokazuje u kojoj se meri stvarna disperzija podataka približava regresionoj liniji.

Prvu informaciju o obliku veze između obeležja  $X$  i  $Y$  daje grafički prikaz vrednosti dvodimenzionalne slučajne promenljive  $(X, Y)$  u koordinatnom sistemu. Skup tačaka  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ , naziva se *dijagramom rasturanja*, „rojem“ ili „oblakom“ rasturanja. Raspored tih tačaka u koordinatnom sistemu daje nam prvu informaciju o obliku, smeru i povezanosti obeležja  $X$  i  $Y$ . Linija koja bude ispunila uslov da najpouzdanije reprezentuje povezanost tih obeležja, je regresiona linija.

Ako iz dijagrama rasturanja zaključimo da se radi o linearnoj regresiji, onda je najbolje prvo odrediti njenu jačinu. To znači da treba izračunati koeficijent korelacije  $r_{X,Y}$  iz datog uzorka  $\{(x_i, y_i), (i = 1, 2, \dots, n)\}$ :

$$r_{X,Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\bar{s}_X \bar{s}_Y} = \frac{\text{Cov}_{X,Y}}{\bar{s}_X \bar{s}_Y}.$$

Uzorački koeficijent korelacije  $r_{X,Y}$  kraće ćemo označavati sa  $r$  i za njega važi  $r \in [-1, 1]$ .

Kao empirijsko pravilo prihvata se sledeće [5]: koeficijent korelacije do 0,30 ukazuje na *neznatnu linearnu vezu*, koeficijent korelacije od 0,30 do 0,70 pokazuje *značajnu linearnu vezu*, a koeficijent korelacije veći od 0,70 znači *veoma jaku linearnu vezu* dva obeležja.

### 3. ORGANIZACIJA ISTRAŽIVANJA

Cilj ovog istraživanja bio je da se utvrdi stepen povezanosti između uspeha učenika u srednjim školama i rezultata koje su ti učenici pokazali na prijemnom ispitu koji organizuje FTN u Čačku. Za osnovni skup ili populaciju u ovom istraživanju uzeli smo učenike koji su u junu 2013. god. polagali prijemni ispit na FTN u Čačku i stekli uslov za upis na željeni studijski program na ovom fakultetu.

Za svaku statističku jedinicu (učenika) posmatrane su dve osnovne varijable: uspeh u srednjoj školi (varijabla  $X$ ) i uspeh na prijemnom ispitu (varijabla  $Y$ ). Posmatrana populacija učenika je podeljena na stratumе. Jedan stratum čine svi učenici koji su položili prijemni ispit za određeni studijski program (ERI, MEH, IM, PM, TI, IT) i kvalifikovali se za upis na taj studijski program. Svi ti podaci preuzeti su blagovremeno sa sajta FTN u Čačku.

Statistička obrada prikupljenog materijala všena je na prethodno opisan način. Analogno istraživanje izvršeno je i za populaciju učenika koji su polagali prijemni ispit na FTN u Čačku u junu 2011. godine. Poređenjem dobijenih rezultata iz ovih dveju populacija može se doći do važnih zaključaka u vezi sa nekim promenama koje prate obrazovanje, ali i sistem vredosti uopšte.

#### 4. REZULTATI

U narednom delu navodimo rezultate koje smo dobili obradom rang liste kandidata koji su se kvalifikovali za upis na FT u Čačku u junu 2013. godine. Obrada podataka se vrši za svaki studijski program posebno (stratum), kao i za čitavu populaciju.

Izračunate uzoračke vrednosti za studijski program Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo (ERI) su:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n(\text{ERI})} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 34,7195; & \bar{y}_{n(\text{ERI})} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = 39,9111, \\ \bar{s}_{n_x(\text{ERI})}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2 = 15,8304; & \bar{s}_{n_y(\text{ERI})}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y}_n)^2 = 192,405, \\ r_{X,Y(\text{ERI})} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sqrt{\bar{s}_{n_x(\text{ERI})}^2 \cdot \bar{s}_{n_y(\text{ERI})}^2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)(y_k - \bar{y}_n)}{\sqrt{\bar{s}_{n_x(\text{ERI})}^2 \cdot \bar{s}_{n_y(\text{ERI})}^2}} = 0,3939, \end{aligned}$$

Za studijske programe Mehatronika (MEH), Inženjerski menadžment (IM), Preduzetnički menadžment (PM), Informacione tehnologije (IT) i Tehnika i informatika (TI), redom je:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n(\text{MEH})} &= 33,1211; & \bar{y}_{n(\text{MEH})} &= 32,6316, \\ \bar{s}_{n_x(\text{MEH})}^2 &= 17,4103; & \bar{s}_{n_y(\text{MEH})}^2 &= 57,3906, & r_{X,Y(\text{MEH})} &= 0,1536. \\ \bar{x}_{n(\text{IM})} &= 31,852; & \bar{y}_{n(\text{IM})} &= 56,2583, \\ \bar{s}_{n_x(\text{IM})}^2 &= 20,0236; & \bar{s}_{n_y(\text{IM})}^2 &= 12,5353, & r_{X,Y(\text{IM})} &= 0,4316. \\ \bar{x}_{n(\text{PM})} &= 28,1653; & \bar{y}_{n(\text{PM})} &= 42,0917, \\ \bar{s}_{n_x(\text{PM})}^2 &= 22,3559; & \bar{s}_{n_y(\text{PM})}^2 &= 112,804, & r_{X,Y(\text{PM})} &= 0,0908. \\ \bar{x}_{n(\text{IT})} &= 33,7435; & \bar{y}_{n(\text{IT})} &= 48,9563, \\ \bar{s}_{n_x(\text{IT})}^2 &= 10,3937; & \bar{s}_{n_y(\text{IT})}^2 &= 30,8215, & r_{X,Y(\text{IT})} &= -0,2591. \\ \bar{x}_{n(\text{TI})} &= 30,075; & \bar{y}_{n(\text{TI})} &= 32,5906, \\ \bar{s}_{n_x(\text{TI})}^2 &= 27,2689; & \bar{s}_{n_y(\text{TI})}^2 &= 168,656, & r_{X,Y(\text{TI})} &= 0,1306. \end{aligned}$$

Za celu populaciju, tj. za sve studijske programe izračunate uzoračke vrednosti su:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n(\text{FTN})} &= 32,0282; & \bar{y}_{n(\text{FTN})} &= 42,0961, \\ \bar{s}_{n_x(\text{FTN})}^2 &= 25,2376; & \bar{s}_{n_y(\text{FTN})}^2 &= 166,786, & r_{X,Y(\text{FTN})} &= 0,1656. \end{aligned}$$

U Tabeli 1 prikazujemo navedene rezultate, kao i analogne rezultate iz 2011. godine, koje dajemo radi poređenja (sa ITs su označeni rezultati za sve kandidate koji su konkurisali na studijski program IT; za ovaj studijski program je konkurisalo 83 učenika za 40 mesta, pa je interesantno posmatrati i rezultate za sve kandidate koji su konkurisali).

	$\bar{x}_n$		$\bar{y}_n$		$\bar{s}_{n_x}$		$\bar{s}_{n_y}$		$r_{X,Y}$	
	2011	2013	2011	2013	2011	2013	2011	2013	2011	2013
ERI	32,72	34,72	42,89	39,91	4,46	3,98	11,90	13,87	0,32	0,39
MEH	34,80	33,12	38,15	32,63	4,91	4,17	13,81	7,58	0,73	0,15
IM	28,23	31,85	48,90	56,26	4,98	4,47	8,40	3,54	0,38	0,43
PM	27,10	28,17	40,31	42,09	4,51	4,73	10,36	10,62	0,15	0,09
IT	28,07	33,74	46,93	48,96	5,08	3,22	10,67	5,55	0,05	-0,26
ITs	/	30,54	/	39,95	/	4,95	/	11,89	/	0,39
TI	/	30,75	/	32,59	/	5,22	/	12,99	/	0,13
FTN	29,21	32,03	44,28	42,10	5,33	5,02	11,14	12,91	0,18	0,17

**Tabela 1:** Uzoračke vrednosti po studijskim programima za 2011. i 2013. godinu

U vezi sa populacijom učenika iz 2013. godine, navodimo neka zažanjanja.

Najbolji učenici po uspehu u srednjoj školi konurisali su redom na studijske programe: ERI, IT, MEH, IM, TI, PM, a najbolje rezultate na prijemnom ispitu ostvarili su učenici koji su konkurisali redom na studijske programe: IM, IT, PM, ERI, MEH, TI.

Kod svih studijskih programa standardna devijacija uspeha u srednjoj školi je drastično manja od standardne devijacije rezultata prijemnog ispita. To samo ne važi za studijski program IM, gde je  $\bar{s}_{n_y} = 3,54$ , što znači da skoro svi učenici imaju približno isti broj poena na prijemnom ispitu  $\bar{y}_n \approx 56$ .

Standardna devijacija uspeha učenika u srednjoj školi cele populacije iz 2013. god. je u intervalu [3,22; 5,22], dok je njena standardna devijacija rezultata na prijemnom ispitu u intervalu [3,54; 13,87]. Najmanja standardna devijacija uspeha učenika u srednjoj školi je  $\bar{s}_{n_x} = 3,22$  na studijskom programu IT, gde je prosekan uspeha  $\bar{x}_n = 33,74$ . To znači da je uspeh učenika na ovom studijskom programu najuravnoteženiji, i to su učenici čiji se uspeh kreće u intervalu [30,52; 36,96] od mogućih 40 poena ( $x_k \in [\bar{x}_n - \bar{s}_{n_x}, \bar{x}_n + \bar{s}_{n_x}]$ ). Najveće rasturanje uspeha je na studijskom programu TI, i taj uspeh je u intervalu [24,9; 35,3].

Najmanja standardna devijacija rezultata na prijemnom ispitu je na studijskom programu IM i ti rezultati su u intervalu [52,7; 59,8], dok je najveće rasturanje rezultata prijemnog ispita na studijskom programu ERI i kreće se u intervalu [26,0; 53,8].

Ako uspeh učenika i rezultata na prijemnom ispitu izrazimo u procentima, zaključujemo da su ti rezultati najusaglašeniji na studijskom programu PM (prosečan uspeh učenika izražen u procentima iznosi 70,42%, dok je prosečan rezultat na prijemnom ispitu ostvaren sa uspešnošću 70,15%) i na studijskom programu IT (84,4% i 81,6%).

Zapazimo još i da je rezultat postignut na prijemnom ispitu slabiji od rezultata ostvarenog u toku srednje škole redom na sledećim studijskim programima: MEH, TI, ERI.

Rezultati na prijemnom ispitu su bolji od uspeha u srednjoj školi na studijskom programu IM (93,8% prema 79,6%).

## 5. ZAKLJUČAK

Sve ove činjenice govore o organizaciji i težini prijemnog ispita, kao i o kriterijumima u srednjim školama i korisnom znanju koje učenici donose pri dolasku na fakultet.

Što se tiče koeficijenta korelacije između uspeha u srednjoj školi i rezultata na prijemnom ispitu, on je uglavnom pozitivan i kreće se od 0,09 (PM) do 0,39 (ERI i ITs).

To znači da između uspeha u srednjoj školi i rezultata na prijemnom ispitu postoji linearna veza koja se kreće od neznatne do značajne. Mada ta veza nema jak intenzitet, ona je pozitivna i postojana.

Koeficijent korelacije je negativan samo za studijski program IT, za studente koji su na osnovu rezultata ispunili uslov za upis, dok je taj koeficijent za sve studente koji su konkurisali na ovaj studijski program pozitivan i značajan: 0,39. To govori da je prisutno veliko interesovanje za ovaj studijski program i da su se neki slabiji učenici ozbiljnije spremili za prijemni ispit na ovom studijskom programu.

U vezi sa istraživanjima iz 2011. godine može se zaključiti: Na studijske programe ERI, IM, IT i PM upisivali su se učenici sa slabijim uspehom u poređenju sa generacijom 2013. godine, dok je na MEH bilo upravo suprotno. Rezultati na prijemnom ispitu bili su slabiji 2011. nego 2013. godine na studijskim programima IT, IM i PM, dok su na ERI i MEH bili bolji.

Linearna zavisnost rezultata na prijemnom ispitu od uspeha u srednjoj školi bila je jaka na MEH (0,73), dok je kod ostalih studijskih programa slična kao 2013. god. Za celu populaciju (FTN) taj koeficijent je 0,18 za 2011. god., a 0,17 za 2013. god.

Na nivou celog fakulteta (FTN), za 2013. god. prosečan uspeh učenika u srednjoj školi je ostvaren sa uspešnošću 80%, i to su bili učenici čiji je uspeh u intervalu [27,0; 37,0] od 40 mogućih poena. Prosečan uspeh na prijemnom ispitu je 70% osvojenih poena, i taj uspeh je u intervalu [29,2; 55,0] od 60 mogućih poena. Na osnov toga zaključujemo da je FTN prepoznao svoje buduće studente i organizovao prijemni ispit u skladu sa kvlaitetom zainteresovanih učenika, ali i da je organizovana priprema za polaganje prijemnog ispita imala značajnog udela u ovakvim rezultatima. Istovremeno, rezultati koje su učenici pokazali na prijemnom ispitu pokazuju da su pred njih stavljeni dovoljno teški zadaci, tako da ih oni nisu mogli savladati u potpunosti. Ta činjenica upozorava buduće studente na težinu izabranog studijskog programa, a samim tim i sugerise im da procesu studiranja pristupe ozbiljno, odgovorno i sistematično.

## 6. LITERATURA

- [1] Janjić, M., Lazarević, V., Micić, Ž., Vujičić, M., (2013). Komparativna analiza uspeha učenika u srednjoj školi i naprijemnom ispitu na mašinskim fakultetima. YU-Info 2013, Kopaonik, Zbornik konferencije (CD), 221-226.
- [2] Janjić, M., Lazarević, V., Vujičić, M., (2012). Comparative Analysis of Secondary-School and Faculty Entrance Exam Results, Proceedeings of the 3rd DQM International Conference ICDQM-2012 (ISBN 978-86-86355-11-9), Belgrade, Serbia, 28-29 June 2012, pp. 148-154.
- [3] Lazarević, V., Đukić, M., (2010). *Inženjerska matematika*, Čačak.: FTN u Čačku.
- [4] Jevremović, V., (2002). *Statističke metode u meteorologiji i inženjerstvu*. Beograd.
- [5] Vukadinović, S. (1973). *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Beograd, Privredni pregled.